Ex.20 证明. 记

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ \vdots \\ b_m^T \end{pmatrix},$$

由假设, 行向量组$a_1^T,a_2^T,\cdots,a_m^T$ 与行向量组$b_1^T,b_2^T,\cdots,b_m^T$ 等价, 则存在m 阶矩阵$P=(p_{ij})$ 和$Q=(q_{ij})$ 使得

$$\begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ \vdots \\ b_m^T \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ \vdots \\ b_m^T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1m} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{m1} & q_{m2} & \cdots & q_{mm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix} \tag{2}$$

方程组$Ax=0$ 和$Bx=0$ 可以分别写为

$$(3)\quad \begin{cases} a_1^Tx=0, \\ a_2^Tx=0, \\ \cdots \\ a_m^Tx=0. \end{cases} \qquad (4)\quad \begin{cases} b_1^Tx=0, \\ b_2^Tx=0, \\ \cdots \\ b_m^Tx=0. \end{cases}$$

根据(1), 将方程组(4) 的m 个方程分别乘以$p_{11},p_{12},\cdots,p_{1m}$ 相加即得到方程组(3) 的第一个方程, 将方程组(4) 的m 个方程分别乘以p_{21}, p_{22}, $\cdots$, p_{2m} 相加即得到方程组(3) 的第二个方程, 重复这个过程, 直到将方程组(4) 的m 个方程分别乘以$p_{m1},p_{m2},\cdots,p_{mm}$ 相加即得到方程组(3) 的第m 个方程, 因此, 对方程组(4) 作初等变换可以得到方程组(3).

类似地, 根据(2), 对方程组(3) 作初等变换可以得到方程组(4).

因此, 方程组(3) 与方程组(4) 同解.